

MAT486 OLASILIK VE İSTATİSTİK DERSİ ARASINAV CEVAP ANAHTARI

22.04.2022

SORU 1. (20 PUAN) Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'ndeki bir öğrencinin ikinci sınıftan üçüncü sınıfa geçme süresiyle ilgili olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{9}, & 0 < y \leq 3 \\ 0, & \text{diğer } d. \end{cases}$$

- $f(y)$ 'nin bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz.
- Soruda değişken var mıdır? Varsa değişkeni tanımlayınız (sözel olarak ifade ediniz)

CEVAP:

- $f(y)$ 'nin bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1$ olması gerekir.

$\int_0^3 \frac{y^2}{9} dy = 1$ olduğundan $f(y)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

- Değişken vardır. "**Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'ndeki bir öğrencinin ikinci sınıftan üçüncü sınıfa geçme süresi**"

SORU 2. (20 PUAN)

$Z = \{G, O, L, F\}$ kümesinin kuvvet kümesini yazınız.

CEVAP:

Kuvvet kümesindeki eleman sayısı, $2^n = 2^4 = 16$ dir.

$$\sigma(A) = P(A) = \{G, O, L, F, GO, GL, GF, OL, OF, LF, GOL, GOF, GLF, OLF, GOLF, \emptyset\}$$

SORU 3. (20 PUAN)

Bir avcının günde vurduğu ortalama keklik sayısını gösteren X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki biçimde olsun.

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{100}x & ; x = 1, 2, \dots, 10 \\ \frac{1}{100}(20 - x) & ; x = 11, 12, \dots, 20 \end{cases}$$

Avcının günde;

- Tam 8 keklik vurma olasılığı kaçtır?
- 8'den çok keklik vurma olasılığı kaçtır?

CEVAP:

a) $P(X = 8) = \frac{1}{100}8 = \frac{8}{100} = 0.08$

b)

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - \frac{1}{100}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 1 - \frac{36}{100} = \frac{64}{100} = 0.64$$

SORU 4. (20 PUAN)

İki fabrikada aynı ürün üretilmektedir.

Birinci fabrikanın ürettiği ürünün bozuk olması olasılığı 0.1 ve ikinci fabrikanın ürettiği ürünün bozuk olması olasılığı 0.3 olsun.

Birinci fabrikadan 7 ve ikinci fabrikadan 3 ürün alınsın. Bu 10 üründen rasgele bir ürün seçilsin ve bozuk olduğu görülsün.

Bu ürünün, **birinci** fabrikaya ait olması olasılığını bulunuz.

CEVAP:

A : Seçilen ürünün bozuk olması

B₁ : Seçilen ürünün birinci fabrikaya ait olması

B₂ : Seçilen ürünün ikinci fabrikaya ait olması

olaylarını tanımlayabiliriz. İstenen olasılık; $P(B_1 / A)$ dır.

$$P(B_1) = \frac{7}{10} = 0.7 \quad , \quad P(B_2) = \frac{3}{10} = 0.3 \quad , \quad P(A / B_1) = 0.1 \quad , \quad P(A / B_2) = 0.3$$

soruda verilmiş.

Bayes teoreminden,

$$\begin{aligned} P(B_1 / A) &= \frac{P(B_1)P(A / B_1)}{P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2)} = \frac{(0.7)(0.1)}{(0.7)(0.1) + (0.3)(0.3)} = \frac{7}{16} \\ &= 0.4375 \end{aligned}$$

SORU 5. (20 PUAN) Bir dört yüzlünün birinci yüzü kırmızı(K), ikinci yüzü mavi(M), üçüncü yüzü yeşil(Y), dördüncü yüzü ise kırmızı-mavi-yeşil(KMY) renk ile boyanmış olsun. Bu dört yüzlü havaya atıldığında K, M, Y renklerinin görünmesi olayları tam bağımsız mıdır?

CEVAP:

Örnek uzay, $S = \{K, M, Y, KMY\}$

Olaylar,

K : Kırmızı yüzün görünmesi $P(K) = 2/4$

M : Mavi yüzün görünmesi $P(M) = 2/4$

Y : Yeşil yüzün görünmesi $P(Y) = 2/4$

KMY : Kırmızı – Mavi – Yeşil yüzün görünmesi $P(KMY) = 1/4$

Tam bağımsızlık için, olayların ikişerli ve üçerli bağımsız olması gerekir.

$$P(K \cap M) = P(K)P(M) \quad , \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \frac{2}{4}$$

$$P(K \cap Y) = P(K)P(Y) \quad , \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \frac{2}{4}$$

$$P(M \cap Y) = P(M)P(Y) \quad , \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \frac{2}{4}$$

$$P(K \cap M \cap Y) \neq P(K)P(M)P(Y) \quad , \quad \frac{1}{4} \neq \frac{2}{4} \frac{2}{4} \frac{2}{4}$$

olduğu için olaylar tam bağımsız değildir.

YEDEK SORU. (20 PUAN)

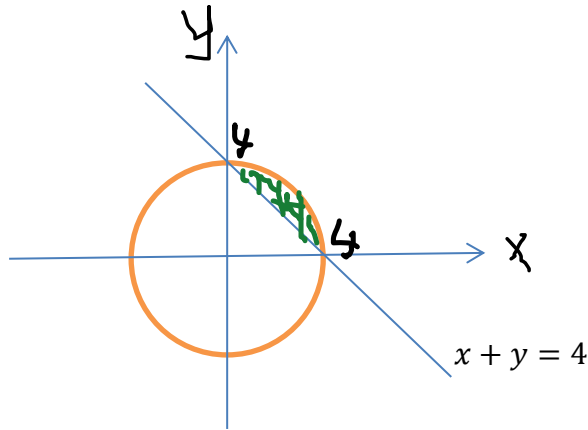
x ve y sayıları, $r = 4$ olan dairenin içinden rasgele seçilsin.

Seçilen sayılar için

$$x + y \geq 4 \text{ ve } x^2 + y^2 \leq 16$$

şartlarının sağlanması olasılığını bulunuz.

CEVAP:



A : Seçilen x ve y sayılarının; $x + y \geq 4$ ve $x^2 + y^2 \leq 16$ şartlarını sağlaması

Şartların sağlandığı bölge, yeşil taralıdır.

Dairenin alanı : $\pi r^2 = 16\pi$

Daire diliminin alanı : 4π

Birinci bölgedeki üçgenin alanı : 8

Yeşil bölgenin alanı = Daire diliminin alanı – üçgenin alanı = $4\pi - 8$

$$P(A) = \frac{\text{Yeşil bölgenin alanı}}{\text{Dairenin alanı}} = \frac{4\pi - 8}{16\pi} = \frac{\pi - 2}{4\pi} \cong 0.09084$$